

# Exercices - La récursivité

Dans chacun des exercices proposés, on demande un code python et généralement le contenu d'une pile d'exécution pour un exemple type. Le code python est à écrire dans un fichier nommé *recursif.py* qui sera à uploader sur *nsibranly.fr*. Les parties écrites demandées sont à compléter directement sur ce poly.

## 1- FONCTION QUI CALCULE LE FACTORIEL D'UN NOMBRE :

Le factoriel d'un nombre  $n$  est noté  $n!$  et est égal au produit des nombres entiers strictement positifs inférieurs ou égaux à  $n$  :  $n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \dots \times 2 \times 1$ .

Par exemple  $4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$

La fonction *fact()* a comme paramètre un entier  $n$ . Elle retourne le nombre  $n!$

1- Ecrire un code itératif de *fact()*

```
def fact(n) :  
    s = 1  
    for i in range(1,n+1) :  
        s = s * i  
    return s
```

2- Ecrire un code récursif de *fact()*

```
def fact(n) :  
    if n == 1 : return 1  
    else : return n * fact(n-1)
```

3- Détailler l'exécution de *fact(4)* en version récursive, en complétant les 2 tableaux ci-dessous :

Empilement dans la Pile d'exécution	Dépilement – Affichage dans la console
$\text{fact}(1) = 1$	
$\text{fact}(2) = 2 \times \text{fact}(1)$	$\text{fact}(2) = 2 \times 1 = 2$
$\text{fact}(3) = 3 \times \text{fact}(2)$	$\text{fact}(3) = 3 \times 2 = 6$
$\text{fact}(4) = 4 \times \text{fact}(3)$	$\text{fact}(4) = 4 \times 6 = 24$

## 2- FONCTION QUI CALCULE LE $n^{\text{ième}}$ TERME D'UNE SUITE DE NOMBRES :

On définit la suite de nombre suivante :  $12 \Rightarrow 14 \Rightarrow 18 \Rightarrow 26 \Rightarrow 42 \Rightarrow 74 \Rightarrow \dots$

Le premier de ces nombres est donc  $u_1 = 12$ . Le nombre suivant s'obtient en multipliant le précédent par 2 et en soustrayant 10. Ainsi pour le 2<sup>nd</sup> nombre de cette suite, on a  $12 \times 2 - 10 = 14$  et donc  $u_2 = 14$ . Pour le 3<sup>ième</sup>, on a :  $14 \times 2 - 10 = 18$ .

La fonction *u()* a comme paramètre un entier  $n$ . Elle retourne le nombre  $u_n$ .

1- Ecrire un code itératif de *u()*

```
def u(n) :  
    u = 12  
    for i in range(2,n+1) :  
        u = 2*u - 10  
    return u
```

2- Ecrire un code récursif de  $u()$

```
def u(n) :  
    if n == 1 : return 12  
    else : return 2*u(n-1) - 10
```

3- Détailler l'exécution de  $u(4)$  en version récursive, en complétant les 2 tableaux ci-dessous :

Empilement dans la Pile d'exécution
$u(1) = 12$
$u(2) = 2 u(1) - 10$
$u(3) = 2 u(2) - 10$
$u(4) = 2 u(3) - 10$

Dépilement – Affichage dans la console
$u(2) = 2 \times 12 - 10 = 14$
$u(3) = 2 \times 14 - 10 = 18$
$u(4) = 2 \times 18 - 10 = 26$

### 3- FONCTION QUI CONSTRUIT UN ARBRE AVEC LE MODULE TURTLE :

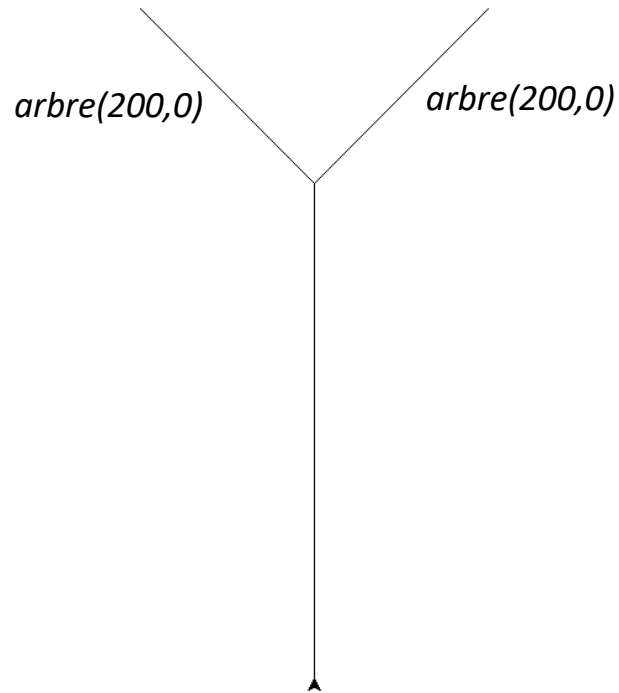
Soit le code récursif de la fonction *arbre()* donné ci-contre.

L'exécution de *arbre(400,1)* permet de tracer l'arbre donné ci-dessous.

On a inscrit à côté de chaque trait, l'appel qui a permis de tracer ce trait.

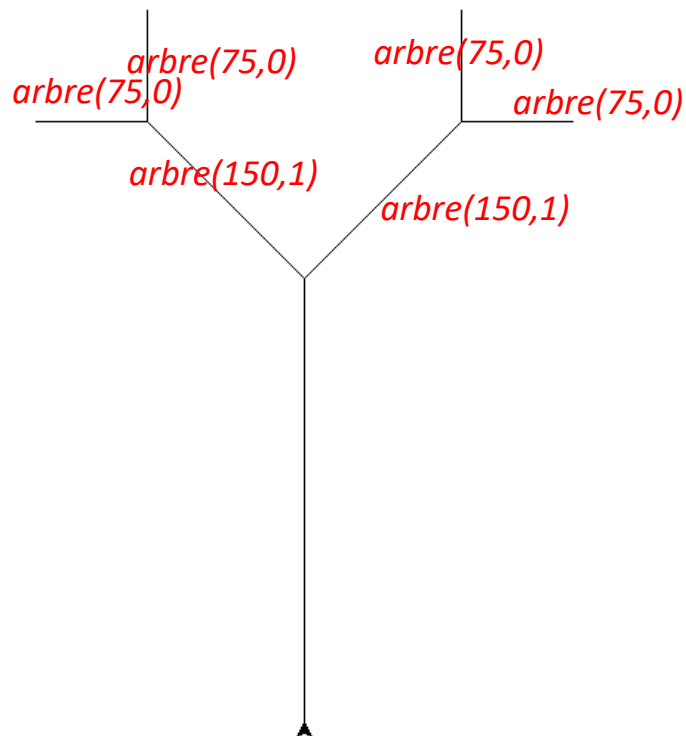
```
from turtle import *  
  
def arbre(hauteur, profondeur) :  
    if profondeur == 0 :  
        forward(hauteur)  
        backward(hauteur)  
    else :  
        forward(hauteur)  
        right(angle)  
        arbre(k*hauteur,profondeur-1)  
        left(2*angle)  
        arbre(k*hauteur,profondeur-1)  
        right(angle)  
        backward(hauteur)  
  
# Main  
angle = 45  
k = 0.5  
up()  
left(90)  
goto(0,-300)  
down()  
arbre(hauteur = 400, profondeur = 1 )  
exitonclick() # pour garder ouverte la fenêtre
```

Exécution de  $arbre(400,1)$  :



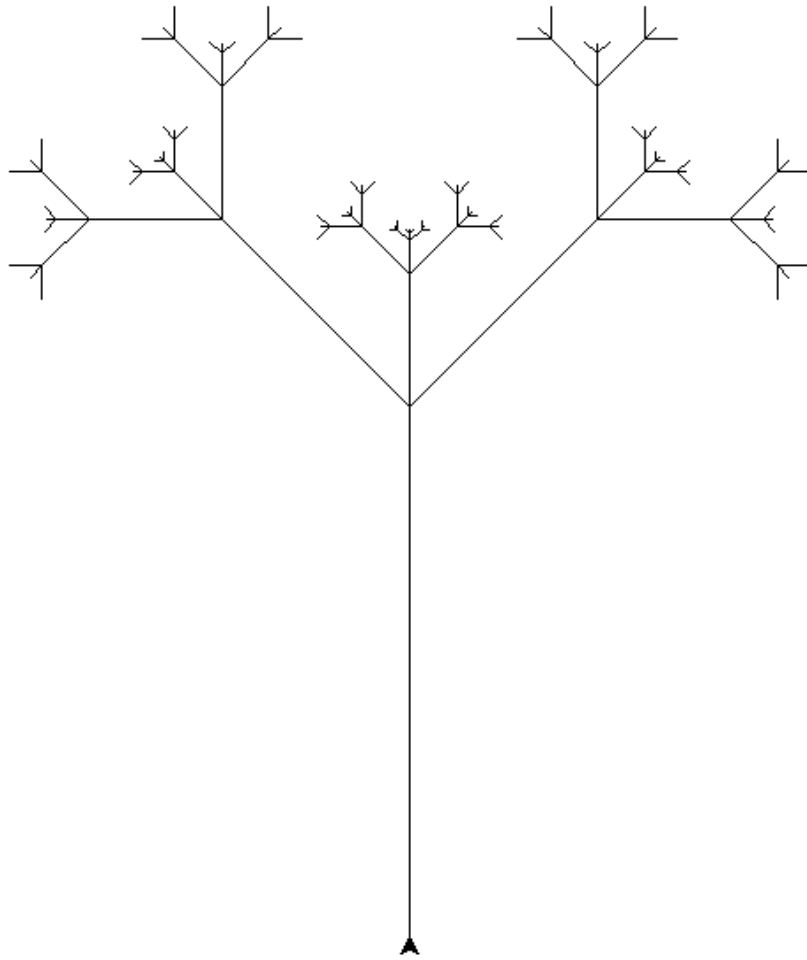
⇒ Copier-coller ce code dans votre fichier et lancer une exécution  $arbre(300,2)$ . Vous obtenez la figure ci-dessous. Comme précédemment, inscrire à côté de chaque trait, l'appel qui a permis de le tracer.

Exécution de  $arbre(300,2)$  :



⇒ A partir du script de la fonction `arbre()` , écrire le script d'une fonction `arbreM()` qui permet d'obtenir à l'exécution de `arbreM(300,4)`, le tracé qui suit.

Exécution de `arbreM(300,4)` :



```
def arbreM(hauteur, profondeur) :  
    if profondeur == 0 :  
        forward(hauteur)  
        backward(hauteur)  
    else :  
        forward(hauteur)  
        arbreM(k*hauteur/2,profondeur-1)  
        right(angle)  
        arbreM(k*hauteur,profondeur-1)  
        left(2*angle)  
        arbreM(k*hauteur,profondeur-1)  
        right(angle)  
        backward(hauteur)
```

#### 4- FONCTION QUI AJOUTE 10 A CHAQUE ELEMENT D'UNE LISTE :

La fonction *ajout()* donnée ci-contre a comme paramètre une liste *l* de valeurs numériques.

```
>>> l=[1,6,5]
```

```
>>> ajout(l)
[11, 16, 15]
```

```
>>> print(l)
[1, 6, 5]
```

Cette fonction retourne une nouvelle liste contenant les éléments de *l* augmentée de 10.

On donne en exemple l'exécution donnée ci-contre, à gauche.

Pour ajouter un élément à une liste, on utilise ici non pas la méthode *append()*, mais le principe de concaténation de listes.

```
def ajout(l) :
    L = []
    for elt in l :
        elt = elt + 10
        L = L + [elt]
    return L
```

On donne ci-dessous une version **récursive** de ce même code :

```
def ajout(l) :
    if len(l) == 0 : return []
    else :
        elt = l[-1] + 10
        return ajout(l[:-1])+[elt]
```

On exécute les lignes suivantes dans la console avec cette version récursive de *ajout()* :

```
>>> l=[1,6,5]
```

```
>>> ajout(l)
[11, 16, 15]
```

1- Détailler l'exécution en complétant les 2 tableaux ci-dessous :

Empilement dans la Pile d'exécution
<code>ajout([ ]) = [ ]</code>
<code>ajout([1]) = ajout([ ]) + [11]</code>
<code>ajout([1,6]) = ajout([1]) + [16]</code>
<code>ajout([1,6,5]) = ajout([1,6]) + [15]</code>

Dépilement – Affichage dans la console
<code>ajout([1]) = [ ] + [11] = [21]</code>
<code>ajout([1,6]) = [11] + [16] = [11, 16]</code>
<code>ajout([1,6,5]) = [11, 16] + [15] = [11, 16, 15]</code>

Pour bien comprendre le fonctionnement du code dans sa version récursive, on a légèrement modifié le code de *ajout()* pour y rajouter des affichages intermédiaires de résultats. Ce donne la version ci-dessous :

```
def ajout(l) :
    if len(l) == 0 : return []
    else :
        print(f"appel récursif ajout({l[:-1]})")
        elt = l[-1] + 10
        retour = ajout(l[:-1]) + [elt]
        print(f"dépilage de ajout({l[:-1]}) + [{elt}]")
        return retour
```

Si on réalise alors la même exécution qu'avant, on obtient :

- 2- Ecrire dans votre fichier *recursif.py* le script de la fonction *ajout()* en complétant correctement les 2 appels de *print()* afin d'obtenir le résultat donné ici :

```
>>> l=[1,6,5]

>>> ajout(l)
appel recursif ajout([1, 6])
appel recursif ajout([1])
appel recursif ajout([])
dépile de ajout([]) + [11]
dépile de ajout([1]) + [16]
dépile de ajout([1, 6]) + [15]
[11, 16, 15]
```

## 5- FONCTION QUI MODIFIE A CHAQUE ELEMENT D'UNE LISTE :

La fonction *affine()* donnée ci-contre a comme paramètre une liste *l* de valeurs numériques et deux nombres *a* et *b*. Cette fonction retourne une nouvelle liste contenant les éléments

de *l* multipliés par *a* et augmentée de *b*.

On donne en exemple l'exécution donnée ci-contre, à gauche.

```
>>> l=[1,6,5]

>>> affine(l,10,5)
[15, 65, 55]
```

```
def affine(l,a,b) :
    L = []
    for elt in l :
        elt = a*elt + b
        L = L + [elt]
    return L
```

⇒ Ecrire dans votre fichier *recursif.py* une **version récursive** de la fonction *affine()* .

```
def affine(l,a,b) :
    if len(l) == 0 : return []
    else :
        new = l[-1]*a+b
        return affine(l[:-1],a,b)+[new]
```

## 6- FONCTION QUI COMPTE LE NOMBRE DE CARACTERES :

La fonction *lg()* donnée ci-contre a comme paramètre un string. Elle en retourne le nombre de caractères.

```
>>> lg("Bonne année")
11
```

On donne en exemple l'exécution donnée ci-contre, à gauche.

```
def lg(mot) :
    nb = 0
    for c in mot :
        nb = nb + 1
    return nb
```

⇒ Ecrire dans votre fichier *recursif.py* une **version récursive** de la fonction *lg()* .

```
def lg(mot) :
    if mot == "" : return 0
    else :
        return 1 + lg(mot[1:])
```

## 7- FONCTION QUI MODIFIE LES CARACTERES D'UN STRING :

La fonction *casse()* donnée ci-contre a comme paramètre un string. Elle retourne le même string en ayant transformé les minuscules en majuscules et vice-versa. Le caractère « *espace* » n'est pas modifié. Ce script utilise un dictionnaire nommé *dic*, non mis en argument car défini dans le programme principal.

On donne en exemple l'exécution donnée ci-dessous :

```
def casse(mot) :
    MOT = ""
    for c in mot :
        C = dic[c]
        MOT = MOT + C
    return MOT

# main
dic = {}
minuscules = "abcdefghijklmnopqrstuvwxyz "
majuscules = "ABCDEFGHIJKLMNOPQRSTUVWXYZ "
for i in range(27) :
    dic[minuscules[i]] = majuscules[i]
    dic[majuscules[i]] = minuscules[i]
```

```
>>> casse("Bonne annee")
'bONNE ANNEE'
```

⇒ Ecrire dans votre fichier *recursif.py* une **version récursive** de la fonction *casse()* .

```
def casse(mot) :
    if mot == "" : return ""
    else :
        c = mot[-1]
        C = dic[c]
        return casse(mot[:-1]) + C
```

## 8- FONCTION QUI COMPTE LE NOMBRE D'OCCURRENCE D'UNE LISTE :

La fonction *nb()* donnée ci-contre a comme paramètre une liste *l* et une valeur. Cette fonction retourne le nombre d'éléments de cette liste égaux à cette valeur.

```
def nb(l,val) :
    nb = 0
    for elt in l :
        if val == elt : nb = nb + 1
    return nb
```

On donne en exemple l'exécution donnée ci-contre :

```
>>> l=[1,6,5]
>>> nb(l,6)
1
```

⇒ Ecrire dans votre fichier *recursif.py* une **version récursive** de la fonction *nb()* .

```
def nb(l,val) :
    if l == [] : return 0
    else :
        if l[-1] == val :
            return 1 + nb(l[:-1],val)
        else :
            return 0 + nb(l[:-1],val)
```

## 9- FONCTION QUI CONSTRUIT UN FRACTALE AVEC LE MODULE TURTLE :

Soit le code récursif de la fonction *triangle()* donné ci-contre.

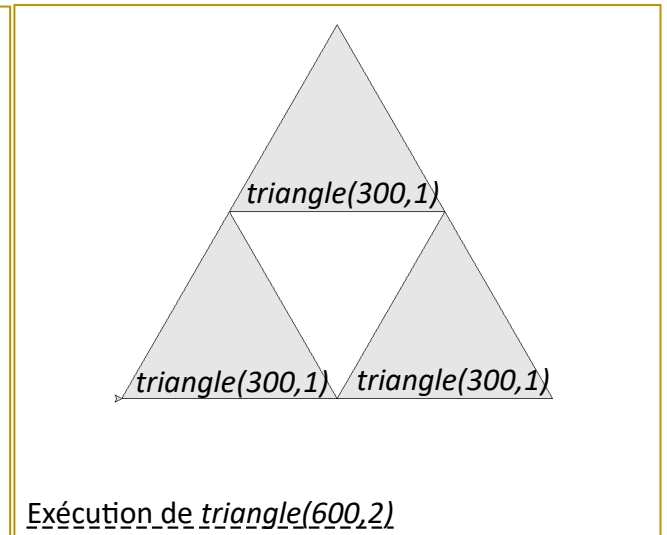
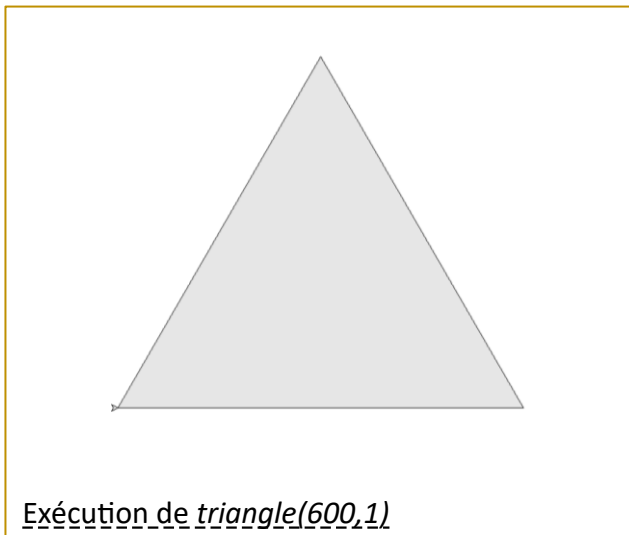
L'exécution de *triangle(600,1)* permet de tracer les figures données ci-dessous.

On a inscrit pour chacun des triangles grisés, l'appel qui a permis de le tracer.

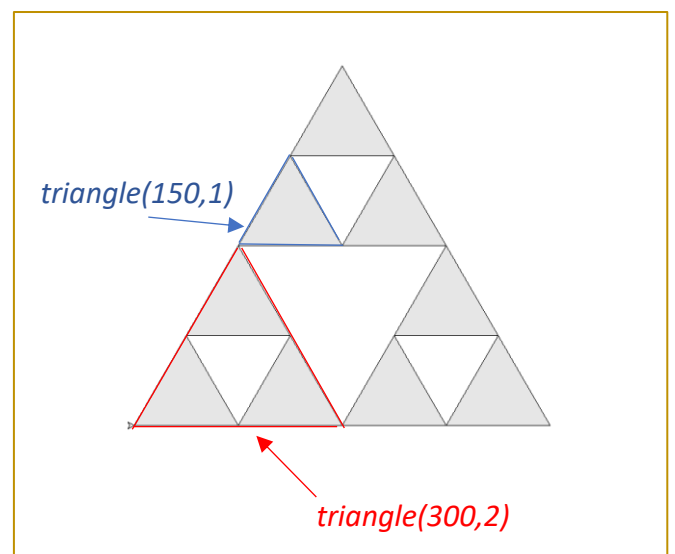
```
from turtle import *

def triangle(cote, n) :
    if n > 0 :
        begin_fill()
        for _ in range(3) :
            triangle(cote/2, n-1)
            forward(cote)
            left(120)
        end_fill()

# Main
fillcolor(.9,.9,.9)
speed(10)
up()
goto(-300,-200)
down()
triangle(600,1)
mainloop()
```



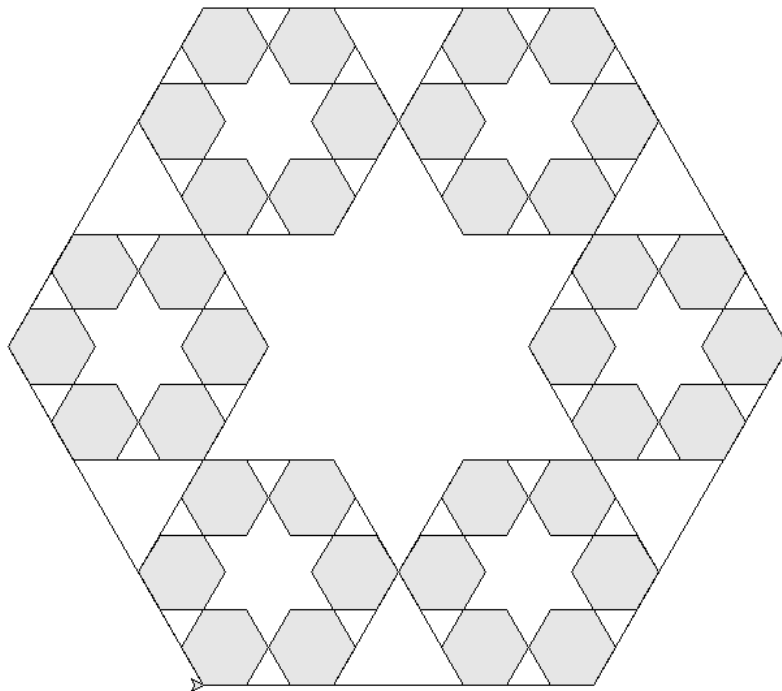
⇒ Copier-coller ce code dans votre fichier et lancer une exécution *triangle(600,3)*. Vous obtenez la figure ci-contre. Colorier en **rouge** un des triangles construits avec l'appel **triangle(300,2)**. Colorier en **bleu** un des triangles construits avec l'appel *triangle(150,1)*.





⇒ A partir du script de la fonction *triangle()* , écrire le script d'une fonction *hexa()* qui permet d'obtenir à l'exécution de *hexa(300,3)*, le tracé qui suit.

Exécution de *hexa(300,3)*



```
def hexa(cote, n) :  
    if n > 0 :  
        begin_fill()  
        for i in range(6) :  
            hexa(cote/3, n-1)  
            forward(cote)  
            left(60)  
        end_fill()
```