# Programmation Dynamique

*Cet exercice porte sur la notion de listes, la récursivité et la programmation dynamique.*

Pour extraire de l'eau dans des zones de terrain instable, on souhaite forer un conduit dans le sol pour réaliser un puits tout en préservant l'intégrité du terrain. Pour représenter cette situation, on va considérer qu'en forant à partir d'une position en surface, on s'enfonce dans le sol en allant à gauche ou à droite à chaque niveau, jusqu'à atteindre le niveau de la nappe phréatique.

Le sol pourra donc être représenté par une pyramide d'entiers où chaque entier est le *score de confiance* qu'on a dans le forage de la zone correspondante. Une telle pyramide est présentée sur la figure 1, à gauche, les flèches indiquant les différents déplacements possibles d'une zone à une autre au cours du forage.

Un conduit doit partir du sommet de la pyramide et descendre jusqu'au niveau le plus bas, où se situe l'eau, en suivant des déplacements élémentaires, c'est-à-dire en choisissant à chaque niveau de descendre sur la gauche ou sur la droite. Le score de confiance d'un conduit est la somme des nombres rencontrés le long de ce conduit. Le conduit gris représenté à droite sur la figure 1 a pour score de confiance $4+2+5+1+3=15$.

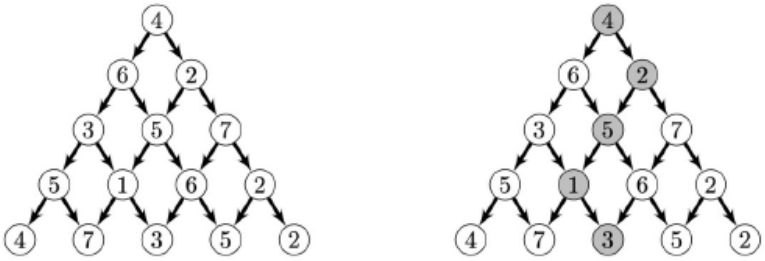
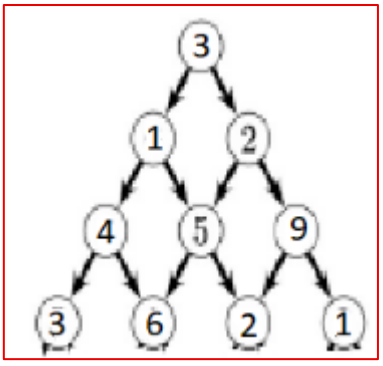



Figure 1.

On va utiliser un ordinateur pour chercher à résoudre ce problème. Pour cela, on représente chaque niveau par la liste des nombres de ce niveau et une pyramide par une liste de niveaux.

La pyramide ci-dessus est donc représentée par la liste de listes

```
ex1 = [[4],[6,2],[3,5,7],[5,1,6,2],[4,7,3,5,2]].
```




1. Dessiner la pyramide représentée par la liste de listes

```
ex2 = [[3],[1,2],[4,5,9],[3,6,2,1]].
```

2. Déterminer un conduit de score de confiance maximal dans la pyramide `ex2` et donner son score.

Le score des différents chemins possibles est :

$$3+1+4+3=11$$
$$3+1+4+6=14$$
$$3+1+5+6=15$$
$$3+1+5+2=11$$
$$3+2+5+6=16$$
$$3+2+5+2=14$$
$$3+2+9+2=16$$
$$3+2+9+1=15$$

Le score de confiance maximal est donc 16. Deux chemins mènent à ce score.

On souhaite déterminer le score de confiance maximal pouvant être atteint pour une pyramide quelconque. Une première idée consiste à énumérer tous les conduits et à calculer leur score pour déterminer les meilleurs.

3. Énumérer les conduits dans la pyramide de trois niveaux représentée sur la figure 2.

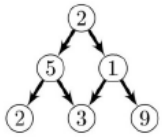


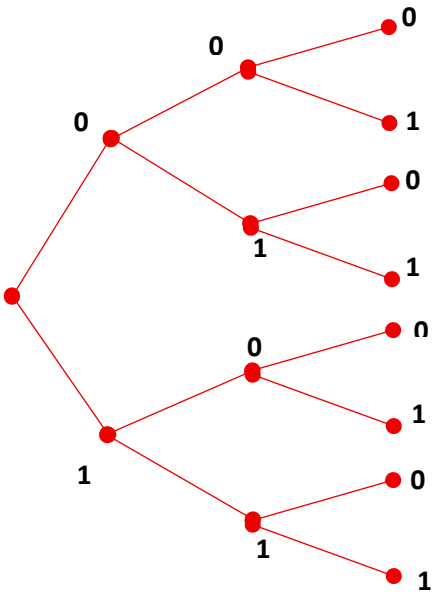

Figure 2.

Les conduits sont : 2->5->2 , 2->5>3 , 2->1>3 , 2->1->9 . On a 4 conduits pour une pyramide de $n=3$ niveaux : $4=2^2=2^{3-1}=2^{n-1}$

Afin de compter le nombre de conduits pour une pyramide de `n` niveaux, on remarque qu'un conduit est uniquement représenté par une séquence de `n` déplacements `gauche` ou `droite`.

4. En considérant un codage binaire d'un tel conduit, où `gauche` est représenté par `0` et `droite` par `1`, déterminer le nombre de conduits dans une pyramide de `n` niveaux.

Pour une pyramide à $n=4$ niveaux, on a $(n-1)$ déplacements à gauche ou à droite. On voit sur l'arbre ci-dessous que cela entraine $2^{n-1}$possibilités de déplacements. Le nombre de conduits pour une pyramide de $n$ niveaux est donc de $2^{n-1}$.



5. Justifier que la solution qui consiste à tester tous les conduits possibles pour calculer le score de confiance maximal d'une pyramide n'est pas raisonnable.

Tester tous les conduits reviendrait à tester $2^{n-1}$ conduits. La complexité est donc exponentielle.

Pour une pyramide $n = 100$ niveaux par exemple, cela donne $2^{99} \approx 6 \,.\, 10^{29}$ conduits possibles. Les temps de calculs induits seraient trop importants.

On dira dans la suite qu'un conduit est maximal si son score de confiance est maximal. Afin de pouvoir calculer efficacement le score maximal, on peut analyser la structure des conduits maximaux.

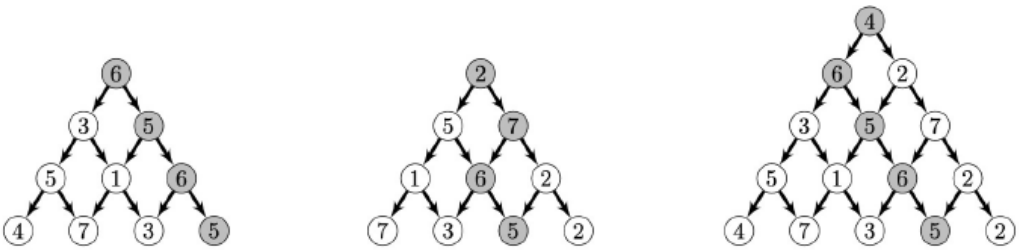



Figure 3.

- **Première observation :** si on a des conduits maximaux `cm1` et `cm2` (représentés en gris dans la figure 3) pour les deux pyramides obtenues en enlevant le sommet de `ex1`, on obtient un conduit maximal en ajoutant le sommet 4 devant le conduit de plus grand score parmi `cm1` et `cm2`. Ici le score de `cm1` est 6+5+6+5=22 et le score de `cm2` est 2+7+6+5=20 donc le conduit maximal dans `ex1` est celui obtenu à partir de `cm1` et dessiné à droite dans la figure 3.
- **Deuxième observation :** si la pyramide n'a qu'un seul niveau, il n'y a que le sommet, dans ce cas, il n'y a pas de choix à faire, le seul conduit possible est celui qui contient le sommet et le nombre de ce sommet est le score maximal que l'on peut obtenir.

Avec ces deux observations, on peut calculer le score maximal possible pour un conduit dans une pyramide `p` par récurrence. Posons `score_max(i,j)` le score maximal possible depuis le nombre d'indice `j` du niveau `i`, c'est-à-dire dans la petite pyramide issue de ce nombre. On a alors les relations suivantes :

- `score_max(len(p)-1,j,p) = p[len(p)-1][j]` ;
- `score_max(i,j,p) = p[i][j] + max(score_max(i+1,j,p),score_max(i+1,j+1,p))`.

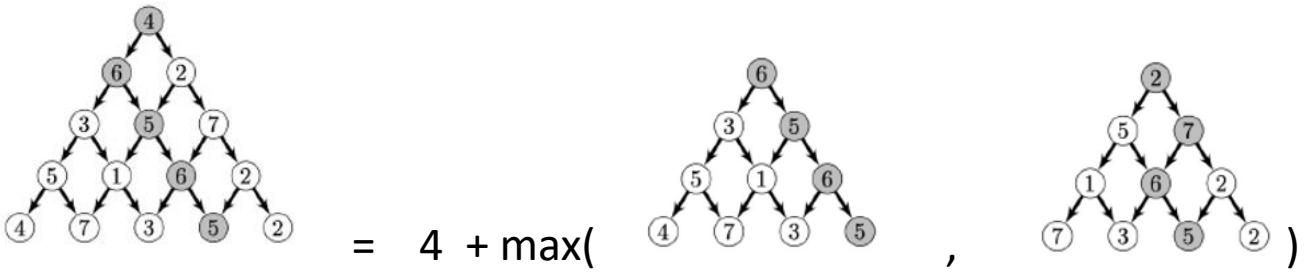
Le score maximal possible pour `p` toute entière sera alors `score_max(0,0,p)`.

6. Écrire la fonction récursive `score_max` qui implémente les règles précédentes.

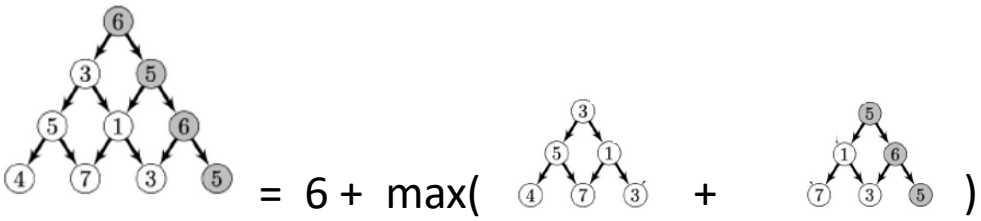
```
def score_max(i,j,p) :
    if i == len(p)-1 :
        return p[i][j]
    else :
        return p[i][j] + max(score_max(i+1,j,p) , score_max(i+1,j+1,p))

s = score_maxi(0,0,p)
print(s)
```

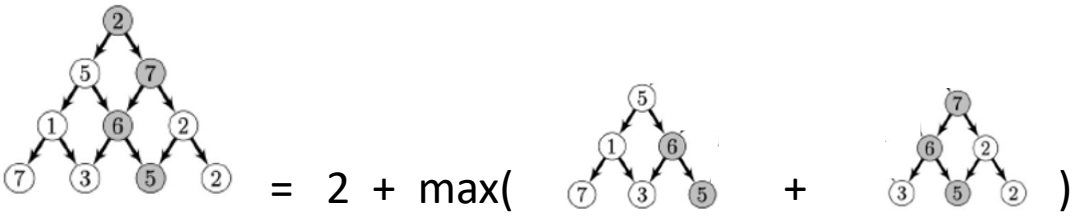
score_max(0,0,p) = 4 + max( score_max(1,0,p) , score_max(1,1,p) )



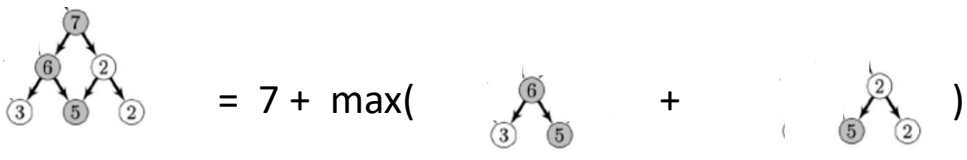
score_max(1,0,p) = 6 + max( score_max(2,0,p) + score_max(2,1,p)



score_max(1,1,p) = 2 + max( score_max(2,1,p) + score_max(2,2,p)



score_max(2,2,p) = 7 + max(score_max(3,2,p) + score_max(3,3,p)



Si on suit à la lettre la définition de `score_max`, on obtient une résolution dont le coût est prohibitif à cause de la redondance des calculs. Par exemple `score_max(3,1,p)` va être calculé pour chaque appel à `score_max(2,0,p)` et `score_max(2,1,p)`. Pour éviter cette redondance, on décide de mettre en place une approche par programmation dynamique. Pour cela, on va construire une pyramide `s` dont le nombre à l'indice `j` du niveau `i` correspond à `score_max(i,j,p)`, c'est-à-dire au score maximal pour un conduit à partir du nombre correspondant dans `p`.

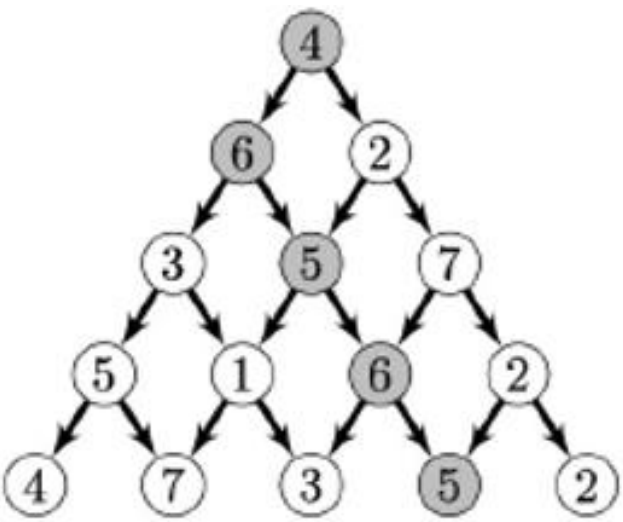
7. Écrire une fonction `pyramide_nulle` qui prend en paramètre un entier `n` et construit une pyramide remplie de `0` à `n` niveaux.

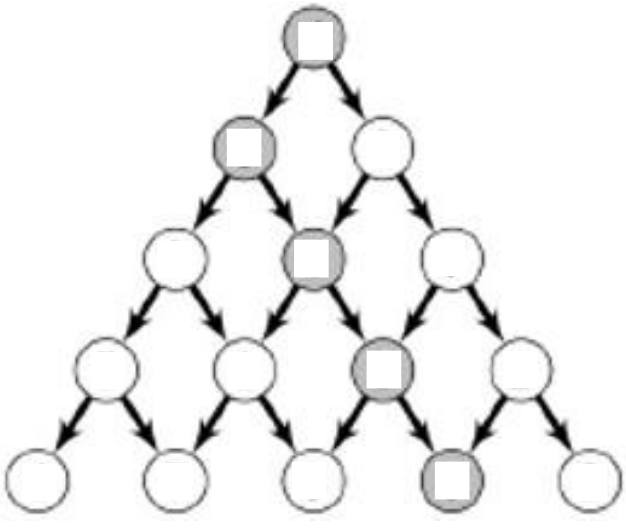
```
def pyramide_nulle(n) :
    l = [[0 for j in range(i)] for i in range(1,n+1)  ]
    return l
```

8. Compléter la fonction `prog_dyn` ci-dessous qui prend en paramètre une pyramide `p`, et qui renvoie le score maximal pour un conduit dans `p`. Pour cela, on construit une pyramide `s` remplie de `0` de la même taille et la remplit avec les valeurs de `score_max` en commençant par le dernier niveau et en appliquant petit à petit les relations données ci-dessus.

- `score_max(len(p)-1,j,p) = p[len(p)-1][j]` ;
- `score_max(i,j,p) = p[i][j] + max(score_max(i+1,j,p),score_max(i+1,j+1,p))`.

```
1   def prog_dyn(p):
2       n = len(p)
3       s = ...
4       # remplissage du dernier niveau
5       for j in ...
6           s[n-1][j] = ...
7       # remplissage des autres niveaux
8       for i in ...
9           for j in ...
10              s[i][j] = ...
11      # renvoie du score maximal
12      return s[0][0]
```



```python
def prog_dyn(p) :
    n = len(p)
    s = pyramide_nulle(n)
    for j in range(n) :
        s[n-1][j] = p[n-1][j]
    for i in range(n-2,-1,-1) :
        for j in range(i+1) :
            s[i][j] = p[i][j] + max(s[i+1][j] , s[i+1][j+1])
    return s[0][0]
```

9. Montrer que le coût d'exécution de cette fonction est quadratique en `n` pour une pyramide à `n` niveaux.

Dans cet algorithme, on a 2 boucles de parcours de liste de taille $n$ qui sont imbriquées l'une dans l'autre. La complexité est donc quadratique en $\mathcal{O}(n^2)$.

10. Expliquer comment adapter la fonction `score_max` pour éviter la redondance des calculs afin d'obtenir également un coût quadratique, tout en gardant une approche récursive.

```python
def score_max(i,j,p) :
    if i == len(p)-1 :
        return p[i][j]
    elif s[i][j] != 0 : return s[i][j]
    else :
        s[i][j] = p[i][j] + max(score_max(i+1,j,p) , score_max(i+1,j+1,p))
        return s[i][j]

n = len(p)
s = pyramide_nulle(n)
score_max(0,0,p)
```

ou

```python
def rec_dyn(p) :
    def score_max(i,j,p) :
        if i == len(p)-1 :
            return p[i][j]
        elif s[i][j] != 0 : return s[i][j]
        else :
            s[i][j] = p[i][j] + max(score_max(i+1,j,p) , score_max(i+1,j+1,p))
            return s[i][j]

    n = len(p)
    s = pyramide_nulle(n)

    return score_maxi(0,0,p)


print(rec_dyn(p))
```